Leçon n° 105 : Groupe de permutations d'un ensemble fini. Applications

Dans la suite on prendra E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$.

I/ Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

A/ Définitions et premières propriétés. [ROM] [PER]

Définition 1 : On note $\mathfrak{S}(E)$.

Proposition 2 : Groupe et cardinal.

Proposition 3 : Si E et F sont isomorphes alors $\mathfrak{S}(E)$ et $\mathfrak{S}(F)$ aussi.

Théorème 4 : Théorème de Cayley.

Remarque 5 : On se ramène à l'étude de $\mathfrak{S}_n$.

Définition 6 : r-cycle.

Définition 7 : Transposition.

Exemple 8 : Exemples de cycles.

Proposition 9 : Un r-cycle est d'ordre r.

Proposition 10 : Centre de $\mathfrak{S}_n$ est réduit à l'identité pour $n \geq 3$.

B/ Actions, support et orbites. [U]

Définition 11 : Points fixes.

Définition 12 : Support.

Proposition 13 : Lien entre support et produit de permutation.

Théorème 14 : Décomposition des permutations en produit de cycles à supports disjoints.

Exemple 15 : Exemple de décomposition.

Définition 16 : Type d'une permutation.

Proposition 17 : Lien entre ordre d'une permutation et type.

Exemple 18 : Reprendre exemple précédent et donner son ordre et son type.

C/ Classes de conjugaison. [U] [ROM]

Proposition 19 : Conjugué d'un k-cycle : $\sigma(a_1 \ \dots \ a_k)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1) \ \dots \ \sigma(a_k))$

Application 20 : Calcul du nombre de k-cycles en utilisant la transitivité de l'action conjugaison sur les k-cycles.

Proposition 21 : Deux permutations sont conjuguées ssi elles ont même type.

D/ Générateurs. [ROM] [PGCD]

Proposition 22 : Tout r-cycle s'écrit comme produit de $r-1$ transpositions.

Théorème 23 : Les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_n$.

Application 24 : Théorème de Schwarz (On montre que le théorème est vrai pour les transpositions et donc est vrai partout)

Proposition 25 : Autres systèmes de générateurs de $\mathfrak{S}_n$.

II/ Morphisme signature et groupe alterné.

A/ Signature d'une permutation. [U] [ROM]

Définition 26 : Existence et unicité du morphisme de signature.

Proposition 27 : Calcul de la signature dans certains cas (transpositions et type).

Définition 28 : Groupe alterné.

Proposition 29 : $\mathfrak{A}_n$ est l'unique sous-groupe distingué d'indice 2 dans $\mathfrak{S}_n$.

B/ Structure de $\mathfrak{A}_n$ et $\mathfrak{S}_n$. [ROM] [PER]

Développement 1.a)

Proposition 30 : $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3-cycles.

Théorème 31 : $\mathfrak{A}_n$ est simple pour $n \geq 5$.

Remarque 32 : $\mathfrak{A}_4$ n'est pas simple (V_4 est un sous-groupe non trivial distingué).

Corollaire 33 : Groupes dérivés de $\mathfrak{A}_n$ et $\mathfrak{S}_n$.

Remarque 34 : Groupe dérivé de $\mathfrak{A}_4$.

Développement 1.b)

Corollaire 35 : Les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ sont $\{\mathrm{Id}\}$, $\mathfrak{A}_n$ et $\mathfrak{S}_n$.

Corollaire 36 : Si H sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ d'indice n alors $H \simeq \mathfrak{S}_{n-1}$.

Application 37 : Isomorphismes exceptionnels.

III/ Applications à d'autres domaines des mathématiques.

A/ Matrices et permutation. [ROM] [OBJ] [PER]

Définition 38 : Matrice de permutation.

Proposition 39 : Morphisme injectif entre $\mathfrak{S}_n$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (via les matrices de permutation).

Corollaire 40 : Tout groupe fini d'ordre $n \geq 1$ où p premier divise n alors il est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$.

Remarque 41 : Utile pour la preuve du premier théorème de Sylow : soit G un groupe, on l'injecte dans $\mathfrak{S}_n$ via Cayley puis on l'injective dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$. Il suffit après d'expliciter un p-Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ et de redescendre.

Théorème 42 : Frobenius-Zolotarev.

B/ Polynômes symétriques. [GOU]

Définition 43 : Polynôme symétrique sur un anneau commutatif.

Exemple 44 : $X+Y+Z \in \mathbb{Z}[X,Y,Z]$ est symétrique.

Définition 45 : Polynômes symétriques élémentaires.

Application 46 : Relations coefficients-racines.

Théorème 47 : Théorème de décomposition des polynômes symétriques.

Exemple 48 : $X^2+Y^2+Z^2 = (X+Y+Z)^2 - 2(XY+XZ+YZ)$.

Application 49 : Théorème de Kronecker.

C/ En géométrie : Isométries préservant les polytopes. [CAL]

Définition 50 : On note $I_S(X)$ les isométries laissant stable X.

Proposition 51 : Triangle équilatéral $I_S(X) \simeq \mathfrak{S}_3$. Pour le polygone régulier c'est le groupe diédral.

Proposition 52 : Groupe isométries tétraèdre.

Développement 2

Proposition 53 : Détermination du groupe des isométries du cube et colorations des cubes à c couleurs.

Références :

— [PER] Perrin p. 18
— [ROM] Rombaldi Algèbre 2nd éd. p. 37-44, p. 407 et p. 429
— [U] Ulmer Théorie des groupes p. 46, p. 55-59
— [PGCD] Rouvière Petit guide du calcul différentiel p. 284
— [G] Gourdon Algèbre p. 78
— [OBJ] Beck, Malick Peyré Objectif Agrégation p. 251
— [CAL] Caldéro Histoires hédonistes tome 1 p. 250